GLAVA 4

Aksiome neprekidnosti

1. Arhimedova aksioma

Iz praktičnog života poznato nam je kako se mjeri rastojanje između dvije tačaka. Kao rezultat mjerenja dobija se jedan pozitivan realan broj. Dakle mjerenje se sastoji u uspostavljanju obostrano jednoznačne korospodencije između skupa svih duži i skupa pozitivnih realnih brojeva. Ta korospodencija vrši se po sljedećoj definiciji:
Neka je svakoj duži pridružen pozitivan realan broj tako da: m_1) podudarnim dužima pridružen je isti broj.
m_2) ako je duž AB zbir duži AC i BC onda je duži AB pridružen broj koji je jednak zbiru dvaju brojeva pridruženi dužima AC i BC.
m_3) postoji duž kojoj je pridružen broj 1.

Broj koji je pridružen duži AB zove se mjerni broj te duži i obilježava se sa $m(AB)$
Duž kojoj je pridružen broj 1 je jedinična duž.

Teorema

Ako je $AB > CD$ onda je $m(AB) > m(CD)$. Dokaz: Na polupravoj sa početnom tačkom O, uočimo tačke Q i P tako da je $OQ \cong CD$ i $OP \cong AB$. Pošto je $AB > CD$ to je $O \cdot Q \cdot P$. Prema prethodnoj definiciji je $m(OP) = m(OQ) + m(QP) > m(OQ)$ jer je $m(QP) > 0$. Kako je $m(OP) = m(AB)$ i $m(OQ) = m(CD)$ to je $m(AB) > m(CD)$.

Teorema

Ako je jedinična duž zadana onda je mjerni broj svake duži koja je manja od jedinične duži jednoznačno određena.

Dokaz Neka je PQ jedinična duž i S središte duži PQ. Tada je $PS \cong QS \cong \frac{1}{2} PQ$. Otuda je $m(PS) = m(QS)$ i $m(PS) + m(QS) = m(PQ)$. Pošto je $m(PQ) = 1$ dobijamo $m(PS) = m(QS) = \frac{1}{2}$. Uočimo duž $AB < PQ$. Iz pravila za upoređivanje duži slijedi da na duži PQ postoji tačka C tako da je duž $PC \cong AB$. Sad se može dogoditi jedan od sljedeća tri slučaja:

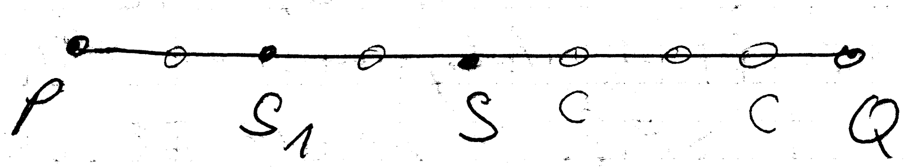
1. $C \equiv S$
2. $P \cdot C \cdot S$
3. $S \cdot C \cdot Q$

U prvom slučaju je $m(AB) = m(PC) = m(PS) = \frac{1}{2}$ tj. mjerni broj je jednoznačno određen. U drugom slučaju je: $0 < m(AB) < \frac{1}{2}$. U trećem slučaju je $\frac{1}{2} < m(AB) < 1$. Slučajevi 2 i 3 mogu se obuhvatiti jednom nejednakošću

$$\frac{n_1}{2} < m(AB) < \frac{n_1+1}{2} \quad \text{gdje je}$$

$n_1=0$ u slučaju 2 a $n_1=1$ u slučaju 3. Ako je $n_1=0$ onda stavljamo $P_1 \equiv P$ i $Q_1 \equiv S$, a ako $n_1=1$ stavljamo $S \equiv P_1$ i $Q \equiv Q_1$. i u svakom slučaju S_1 je središte duži P_1Q_1. Sada opet mogu nastupiti razni slučajevi. Tačka C može se poklopiti sa S_1 i u slučaju $n_1=0$ i $n_1=1$ tj. može biti $m(PC)=\frac{1}{4}$ ili $m(PC)=\frac{3}{4}$. Posljednja dva slučaja obuhvatamo jednom nejednakošću na sljedeći način:

$$m(AB)=m(PC)=\frac{n_1}{2}+\frac{1}{2^2}$$



Dalji slučajevi su: $0<m(PC)<\frac{1}{4}$,

$\frac{1}{4}<m(PC)<\frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}<m(PC)<\frac{3}{4}$, $\frac{3}{4}<m(PC)<1$

Prvi i treći, drugi i četvrti slučajeve obuhvaćamo sljedećim nejednakostima:

$$\frac{n_1}{2}<m(PC)<\frac{n_1}{2}+\frac{1}{2^2}$$

$$\frac{n_1}{2} + \frac{1}{2^2} < m(PC) < \frac{n_1+1}{2}$$

Posljednje dvije nejednakosti možemo predstaviti jednom:

$$\frac{n_1}{2} + \frac{n_2}{2^2} < m(PC) < \frac{n_1}{2} + \frac{n_2+1}{2^2}$$

gdje je $n_2=0$ ili je $n_2=1$.
U ovom slučaju mjerni broj duži AB određen je do na $\frac{1}{4}$ tj. nije jednoznačno određen i mi postupak nastavljamo. Nastavljajući postupak mi dobivamo sve manji brojni razmak u kojme se nalazi $m(AB)$: $0 = n_1$

$$\frac{n_1}{2} + \frac{n_2}{2^2} + \dots + \frac{n_\nu}{2^\nu} < m(AB) < \frac{n_1}{2} + \frac{n_2}{2^2} + \dots + \frac{n_\nu+1}{2^\nu}$$

i pri tome je $n_\nu=0$ ili je $n_\nu=1$.
Prema tome postoje dvije mogućnosti - postoji cio pozitivan broj ν (ni) tako da je $C \equiv S_\nu$ ili takav broj ν (ni) ne postoji. U ovom prvom slučaju je $m(AB) = \frac{n_1}{2} + \frac{n_2}{2^2} + \dots + \frac{n_\nu}{2^\nu}$, tj. $m(AB)$ jednoznačno je određen. U drugom slučaju broj $m(AB)$ je granična vrijednost dva monotona niza brojeva od kojih jedan n

da a drugi ne raste. Razlika opštih članova nizova je $\frac{1}{2^n}$ a taj broj teži 0 kad teži u beskonačno. ~~ako~~ Prema tome granica uvijek jednoznačno određena.
d se može postaviti sljedeće pitanje: a je sa dužima koje su veće od jedinične uži, Teorema 2 može se proširiti i na njih i tek kad se aksiomama I, II i III grupe oda na aksioma.

4, Arhimedova aksioma

eka su AB i CD proizvoljne duži. Neka čke A_1, A_2, A_3 i tako dalje $\in \overset{\circ}{AB}$ tako da $A \cdot A_1 \cdot A_2$, $A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$, $A_2 \cdot A_3 \cdot A_4$, ... i $AA_1 \cong A_1A_2 \cong A_2A_3 \cong \ldots \cong CD$. Tada postoji io ~~[illegible]~~ pozitivan broj n takav da je li $A_n \equiv B$ ili je $A_n \cdot B \cdot A_{n+1}$.
rhimedova aksioma je prva aksioma iz rupe IV koja nosi naslov aksime neprekidnosti. Sada smo u mogućnosti da dokažemo sljedeću teoremu:

teorema
Ako je jedinična duž zadana mjerni broj svake duži jednoznačno je određen. ~~[illegible]~~
okaz: Neka je zadana jedinična duž PQ akle $m(PQ)=1$. Uočimo duž AB i na polupravoj $\overset{\circ}{AB}$ uzmimo tačke $A_1, A_2, A_3 \ldots$ tako da je $A \cdot A_1 \cdot A_2$, $A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$ itd i $AA_1 \cong A_1A_2 \cong$ $A_2A_3 \cong \ldots \cong PQ$. Prema Arhimedovoj aksiomi

postoji cio pozitivan broj n tako da je ili $A_n \equiv B$ ili je $A_n \cdot B \cdot A_{n+1}$. U prvom slučaju je $m(AB) = m(AA_n) = m(AA_1) + m(A_1A_2) + \dots + m(A_{n-1}A_n) = n$.
U drugom slučaju je $m(AA_n) < m(AB) < m(AA_{n+1})$ tačnije $m(AB) = m(AA_n) + m(A_nB) = n + m(A_nB)$.
Duž A_nB je manja od jedinične duži pa je prema teoremi 2 $m(A_nB)$ jednoznačno određen. Kako je broj n jednoznačno određen to je jednoznačno određen zbir $n + m(A_nB)$.

Postupak koji je opisan u teoremama 2 i 3 zove se mjerenje duži. U obema tim teoremama govori se o jednoznačnosti mjernog broja duži. Prirodno je da se postavi pitanje i njegove egzistencije. No prije nego što iskažemo odgovarajuću teoremu dokazaćemo jednu teoremu i navesti dvije posljedice:

I

Za svaku duž AB poslije n uzastopnih raspolavljanja jedinične duži dobije se duž koja je manja od duž AB. Pri tome je n cio pozitivan broj.

$n \cdot AB < PQ$

$AB < \frac{PQ}{n}$

Dokaz: Pretpostavimo da tvrdnja teoreme nije tačna tj. pretpostavimo da je $n(AB) < PQ$ gdje je PQ jedinična duž. Ovo je kontradikcija sa arhimedovom aksiomom.

Neposredne posljedice su:

1. Ako je broj $m(AB)$ dat u obliku beskonačnog zbira $m(AB) = n + \frac{n_1}{2} + \frac{n_2}{2^2} + \dots + \frac{n_v}{2^v} + \dots$ ne mogu svi n_v počev od nekog fiksiranog biti jednaki 1.

2. Neka je duž $AB < CD$. Ako je a broj koji se dobije pri mjerenju duži AB, a c broj koji se dobije pri mjerenju duži CD onda je $a < c$.
Mi smo sada u mogućnosti da dokažemo sljedeću teoremu:

s teorema

Svakoj duži može se pridružiti pozitivan realan broj tako da bi brojevi zadovoljavaju sve uslove iz definicije mjerenja.

Dokaz

Svakoj duži pridružimo broj koji je dobijen kao rezultat mjerenja te duži na način koji je opisan naprijed. Odmah je jasno da je uzor $m3$ naše definicije zadovoljen. Naime postupak mjerenja primjenjen na jediničnu duž daje broj 1. Dokažimo da je zadovoljen i uslov $m1$). Neka je $AB \cong A'B'$, neka su tačke $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n, A_{n+1}, S_1, S_2, \dots \in \vec{AB}$ dobijene u procesu mjerenja onako kako smo to naprijed opisali. Primjenom aksioma podudarnosti odmah slijedi da poluprava $A'B'$ sadrži tačke $A_1', A_2', A_3', \dots, A_n', A_{n+1}', S_1', S_2', \dots$ i da je raspored tih tačaka istovjetan rasporedu odgovarajućih tačaka na polupravoj AB a dobijene duži su podudarne odgovarajućim dužima na AB.
Drugim riječima pri mjerenju dvije podudarnih duži dobija se isti mjerni broj.
Dokažimo da je zadovoljen i uslov $m2$):
Neka je $A \cdot B \cdot C$ i označimo sa $P_n Q_n$

duž koja se dobije nakon n uzastopnih raspolavljanja jedinične duži PQ. Neka su $A_1, A_2, A_3 \dots$ tačke na polupravoj BA tako da je $B\cdot A_1 \cdot A_2$, $A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \dots$ i $BA_1 \cong A_1A_2 \cong A_2A_3 \cong \dots \cong P_nQ_n$. Prema Arhimedovoj aksiomi postoji cio pozitivan broj p tako da je ili je $A \equiv A_p$ ili je $A_p \cdot A \cdot A_{p+1}$. Drugim riječima vrijedi

$$BA_p \leq BA < BA_{p+1}.$$

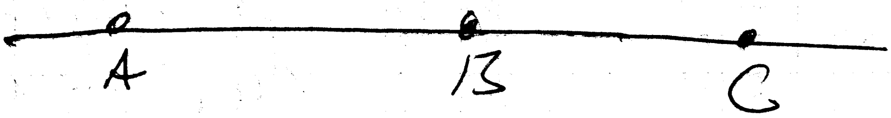
Isto tako na polupravoj BC uočimo tačke $C_1, C_2, \dots$ tako da je $B \cdot C_1 \cdot C_2$, $C_1 \cdot C_2 \cdot C_3, \dots$ i da je $BC_1 \cong C_1C_2 \cong C_2C_3 \cong \dots \cong P_nQ_n$.
Opet po Arhimedovoj aksiomi postoji cio pozitivan broj q tako da ili je $C_q \equiv C$ ili je $C_q \cdot C \cdot C_{q+1}$. Drugim riječima vrijedi

$BC_q \leq BC < BC_{q+1}$. Dakle imamo

$$BA_p \leq BA < BA_{p+1}$$
$$BC_q \leq BC < BC_{q+1}$$

odnosno $A_pC_q \leq AC < A_{p+1}C_{q+1}$

Iz posljedice 2 i činjenice da je duž P_nQ_n dobijena nakon n uzastopnih raspolavljanja jedinične duži dobijamo:



$$\frac{p}{2^n} \leq \overset{n}{m}(AB) \leq \frac{p+1}{2^n}$$

$$\frac{q}{2^n} \leq \overset{n}{m}(BC) < \frac{q+1}{2^n}$$

+

$$P_n \, Q_n \quad \frac{p+q}{2^n} \leq \overset{n}{m}(AC) < \frac{p+q+2}{2^n}$$

otuda je

$$\frac{p+q}{2^n} < \overset{n}{m}(AC) < \frac{p+q+2}{2^n}$$

odavde slijedi

$$|m(AB)+n(AC) - n(AC)|$$

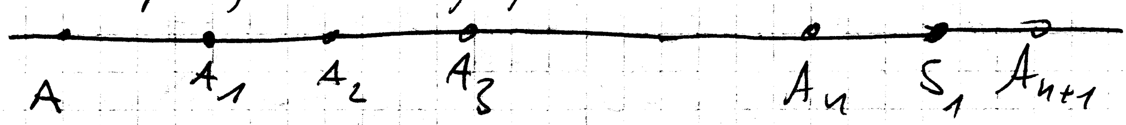
kad saberemo dobijamo

$$|m(AB)+m(BC)-m(AC)| < \frac{1}{2^{n-1}}$$

Kako je n proizvoljan broj dobivamo da je $\overset{n}{m}(AB) + \overset{n}{m}(BC) = \overset{n}{m}(AC)$ dakle dobivamo uslov $m_2.)$.

KANTOROVA AKSIOMA:

Neka je dat beskonačan niz duži $A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 \ldots C_n$ tako da $A_{n+1}B_{n+1} \subset A_nB_n \ \forall n$ i ne postoji duž ~~koja~~ je sadržana u unutrašnjosti svih duži niza. Tada postoji tačka koja je sadržana u svim dužima niza.



Kantorova aksioma

Neka je zadana jedinična duž i pozitivan realan broj ~~u~~ r. Postavlja se pitanje da li se može odrediti duž AB tako da je $m(AB) = r$. Ovaj problem nemožemo riješiti na osnovu dosad datih aksioma i njihovih posljedica. U tu svrhu uvodimo sljedeću aksiomu:

IV_2 Katorova aksioma - ako je jedinična duž zadana, za svaki pozitivan realan broj r postoji duž AB tako da je $m(AB) = r$. ~~ll~~

Dokaz: r je pozitivan realan broj pa on može biti racionalan poz. br. ili iracionalan ~~u~~ poz. br. Ako je on racionalan broj onda se može napisati u obliku konačnog zbira a ako je iracionalan onda se može napisati u obliku beskonačnog zbira

$$(*)\quad r = n + \frac{n_1}{2} + \frac{n_2}{2^2} + \ldots + \frac{n_\nu}{2^\nu} + \ldots$$

Pri tome je n ceo pozitivan broj ili 0 a $n_\nu = 0$ ili $n_\nu = 1$. Neka je a poluprava sa početnom tačkom A. Na toj polupravoj uzmimo tačke A_1, A_2, A_3 itd $A_n, A_{n+1} \ldots$ tako da je $A \cdot A_1 \cdot A_2$, $A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$ itd. i da je $AA_1 \cong A_1A_2 \cong \ldots \cong A_nA_{n+1} = PQ$ gde je PQ jedinična duž. Neka je S_1 središte duži A_nA_{n+1}. Ako je $n_1 = 0$ stavimo $A_n \equiv P_1$ i $S_1 \equiv Q_1$ a ako je $n_1 = 1$ stavimo $S_1 \equiv P_1$ i $A_{n+1} \equiv Q_1$. Imamo $m(AA_n) = n$

$$m(AS_1) = m(AA_n) + m(A_nS_1) = n + \frac{1}{2}.$$

Neka je S_2 središte duži P_1Q_1. Ako je $n_2 = 0$ stavimo $P_1 \equiv P_2$ $S_2 \equiv Q_2$ a ako je $n_2 = 1$ stavimo $S_2 \equiv P_1$ $Q_1 \equiv Q_2$. U slučaju $n_2 = 0$ je $m(AS_2) = n + \frac{1}{4}$ a u drugom slučaju

$$m(AS_2) = n + \frac{3}{4}.$$

Ove jednakosti možemo obuhvatiti jednom $m(AS_2) = n + \frac{n_1}{2} + \frac{1}{2^2}$.

Neka je S_3 središte duži P_2Q_2. Sada bismo dobili $m(AS_3) = n + \frac{n_1}{2} + \frac{n_2}{2^2} + \frac{1}{2^3}$.

Nastavimo ovaj postupak. Mogu se dogoditi duži slučaja: Ako je broj r dat u obliku konačnog zbira (ako je racionalan) onda postoji tačka S_{r} tako da je $m(AS_r)=r$. Ako je broj r dat u obliku beskonačnog zbira (*) onda imamo beskonačan niz duži:

$$(**) \quad A_n A_{n+1},\ P_1 Q_1,\ P_2 Q_2 \ldots$$

Svaka duž ovog niza nastala je raspolavljanjem prethodne duži što znači da je svaka duž niza sadržana u prethodnoj duži. Jedna njena krajnja tačka je istovremeno i krajnja tačka prethodne duži. Međutim ne može se dogoditi da sve duži $P_r Q_r$ počev od nekog utvrđenog r (ni) imaju zajedničku krajnju tačku jer se ne može dogoditi da svi n_r u zbiru (*) počev od nekog utvrđenog budu jednaki 0 odnosno 1. Naime, ako bi se dogodilo da svi budu jednaki 0 onda se broj r piše u obliku konačnog zbira a kod nas je pretpostavka da je r iracionalan. Da svi n_r ne mogu biti jednaki jedan počev od nekog utvrđenog ~~ne~~ slijedi iz Arhimedove aksiome. Drugim riječima u nizu duži zvijezde postoji duž $P_k Q_k$ čije su sve tačke unutrašnje tačke $P_1 Q_1$ pa postoji duž $P_e Q_e$ čije su sve tačke unutrašnje tačke duži $P_k Q_k$. Dalje znamo da svaka duž $P_k Q_k$ postoji cio pozitivan broj n

dovoljno velik tako da se poslije n uzastopnih raspolavljanja jedinične duži dobija duž koja je manja od duži $P_k Q_k$. Drugim riječima u nizu duže zvijezde ne postoji duž koja je sadržana u svim dužima niza. Prema Kantorovoj aksiomi postoji tačka X koja je sadržana u svim dužima niza. U oba slučaja duž AB je određena. U slučaju kad je r racionalan to je duž AS_r a u slučaju kad je r iracionalan to je duž AX. Primjedba:

a.) primijetimo da duž AB nije jedina duž koja zadovoljava uslov $m(AB) = r$. Naime za svaku duž $A'B' \cong AB$ je $m(A'B') = r$. Kako su duži AB i $A'B'$ predstavnici ili reprezentacije jednog istog elementa $d \in D$ to vrijedi $m(d) = r$. Sada se sljedeće tri teoreme: 1. ako je jedinična duž zadana, mjerni broj svake duži jednoznačno je određen.

2. svakoj duži može se pridružiti pozitivan realan broj tako da ti brojevi zadovoljavaju sve uslove definicije mjerenja

3. Ako je jedinična duž zadana za svaki pozitivan realan broj r postoji duž AB tako da je $m(AB) = r$

Mogu iskazati kao jedna teorema: Ako je jedinična duž zadana preslikavanje $f: D \to R^+$ tako da je

$f(d) = m(d)$ za svako $d \in \mathcal{D}$ gdje je R^+ skup pozitivnih realnih brojeva je BIJEKCIJA.

b.) Kao neposljednju posljedicu imamo sljedeću teoremu: neka je a poluprava sa početnom tačkom O. Ako je jedinična duž zadana preslikavanje $f: a \to R^+$ tako da je $f(A) = m(OA)$ za svako $A \in a$ je bijekcija. Skup R^+ je skup pozitivnih realnih brojeva.

c.) Posljednja teorema veoma je značajna jer se na njoj zasniva definicija koordinata na pravoj u ravni i u prostoru. Ilustrovaćemo slučaj prave. Uočimo proizvoljnu pravu p i tačku O na toj pravoj. Tačka O nazvaćemo koordinatnim početkom, ta tačka na pravoj p određuje dvije poluprave. Jednu od njih nazvaćemo pozitivnom a drugu negativnom. Ako je jedinična duž zadana za svaku tačku $A \in p$, $A \neq O$ $m(OA)$ je jednoznačno je određen. Taj broj sa pozitivnim znakom ako tačka A pripada pozitivnoj ~~polu~~ polupravoj a sa negativnim znakom ako tačka A pripada negativ. polupravoj je koordinata tačke A. Koordinata tačke O je nula. Dakle svakoj tački prave p

odgovara jedna i samo jedna koordinata dobiva
svakom realnom broju pridružena je jedna i
samo jedna tačka na pravoj, to je ona tačka
čija je to koordinata.

Dedekindov princip

Naprijed smo ~~[illegible]~~ definisali u skupu
tačaka prave relaciju $A<B$. Dokazali
smo da je to relacija strogog poretka.
Također smo dokazali da ova relacija odre-
đuje orjentaciju na pravoj. Dokazali smo
i obrnuto da orjentacija na pravoj određu-
je relaciju $A<B$. Neka su na uočenoj pravoj
definisane koordinate i neka je x_1 koordi-
nata tačke A_1 a x_2 koordinata tačke A_2.
Izaberimo orjentaciju na pravoj tako da je
koordinatni početak O [uslov] ispred svih tačaka
pozitivne polupravе. Pretpostavimo da ta-
čke A_1 i A_2 pripadaju pozitivnoj polupravoj.
Znamo da tada iz $O \cdot A_1 A_2 \Rightarrow O<A_1<A_2$
Otuda je $x_1<x_2$. Sličan zaključak bi dobili
ako pretpostavimo da su tačke A_1 i A_2 tačke
negativne poluprave odnosno ako je jedna ta-
čka pozitivne a jedna negativne poluprave
i obrnuto. Prema tome vrijedi:
$\frac{T}{4}$ između uređenog skupa svih tačaka prave
i uređenog skupa svih realnih brojeva može

se uspostaviti obostrana jednoznačna korespodencija tako da se odgovarajući elementi nalaze u istovjetnim odnosima rasporeda.

Dobro nam je poznat Dedekindov princip za skup realnih brojeva: Ako su svi realni br. podijeljeni u dvije klase tako da:

a. svaki broj pripada jednoj i samo jednoj klasi i klase sadrže brojeve

b. svaki broj prve klase manji je od svakog broja druge klase onda ili u prvoj klasi postoji najveći broj, ili u drugoj klasi postoji najmanji broj.

Sad smo u mogućnosti da iskažemo Dedekindov princip za skup tačaka prave: ako su sve tačke prave podijeljene u dvije klase tako da:

a. svaka tačka pripada jednoj klasi i klase sadrže tačke

b. svaka tačka prve klase je ispred svake tačke druge klase onda ili u prvoj klasi postoji tačka ispred koje su sve ostale tačke te klase ili u drugoj klasi postoji tačka koja je ispred svake tačke te klase. Za tačku o kojoj se govori u prethodnoj teoremi kaže se da u skupu tačaka prave vrši Dedekindov presjek.

Daklе za skup tačaka prave na osnovu

dosad datih aksioma i njihovih posljedica izveli smo Dedekindov princip. Dokazaćemo obrnuto. Naime, dokazaćemo da vrijedi: Na osnovu prve, druge i treće grupe aksioma i njihovih posljedica te Dedekindovog principa za skup tačaka prave dokazaćemo da vrijedi kako Arhimedova tako i Kantorova aksioma. Dokaz ćemo izvesti za Kantorovu aksiomu: Neka je dat beskonačan niz duži $A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 \ldots \subset p$ tako da $A_{n+1}B_{n+1} \subset A_nB_n \ \forall n$ i ne postoji duž koja je sadržana u svim dužima niza. Orijentaciju na pravoj izaberimo tako da je $A_n < B_n \ \forall n$ (ako to nije ispunjeno za neko n onda A_n označimo sa B_n i obrnuto). Podelimo tačke prave p u dvije klase tako da je tačka u prvoj klasi ako je ona ispred neke tačke A_n. Sve ostale tačke stavimo u drugu klasu. Odmah se vidi da svaka tačka pripada jednoj i samo jednoj klasi. Prva klasa sadrži barem tačke A_1, A_2 itd. a druga barem $B_1, B_2 \ldots$ Tačke prve klase su ispred tačaka druge klase. Prema tome svi uslovi Dedekindovog principa su zadovoljeni. O tome principu postoji tačka C koja vrši presjek. Kako u prvoj klasi ne postoji posljednji element to je tačka C tačka druge klase tj. tačka C je iza

svih tačaka $A_1, A_2, \ldots A_n \ldots$ a ispred svih tačaka $B_1, B_2, B_n \ldots$ To znači da $C \in A_nB_n \forall n$ što je i bila tvrdnja teoreme. ~~Prema tome~~
Prema tome vrijedi ako su zadovoljene aksiome prve, druge i treće grupe aksiome neprekidnosti ekvivalentne su Dedekindovom principu.

Mjerni broj duži u raznim sistemima mjerenja

Neka je PQ jedinična duž. Preslikavanje $f: D \rightarrow R^+$ takvo da je $f(d) = m(d)$ za $d \in D$ je bijekcija. Neka je sada za jediničnu duž izabrana duž P_1Q_1 i neka nije $P_1Q_1 \cong PQ$. Preslikavanje $f_1: D \rightarrow R$ tako da je $f_1(d) = m_1(d)$ $d \in D$ je također bijekcija. Kažemo da se u prvom slučaju radi o jednom sistemu mjerenja duži a u drugom slučaju o drugom -II- -II- duži. Postavlja se pitanje kako se mijenja $m(d)$ ili još jednostavnije $m(AB)$ pri prelasku iz jednog sistema u drugi. O tome govori sljedeća teorema
Ako je $m(AB)$ mjerni broj duži AB u sistemu mjerenja čija je jedinična duž PQ a $m_1(AB)$ mjerni broj duži u sistemu mjerenja čija je jedinična duž P_1Q_1 onda je $m_1(AB) = m(AB) \cdot m_1(PQ)$ gdje je $m_1(PQ)$

mjerni broj duži ~~ABmjere~~ PQ u sistemu mjerenja čija je jedinična duž P_1Q_1.

<u>Dokaz:</u> Neka je $m(AB)=n$ gdje je n cio pozitivan broj. Tada je $n \cdot PQ = AB$. Prema definiciji mjerenja u novom sistemu mjerenja vrijedi $m_1(AB)=m_1(PQ)+m_1(PQ)+\dots+m_1(PQ)$
$$=n \cdot m_1(PQ) = m(AB)\cdot m_1(PQ)$$

Neka je sada $m(AB)=\frac{1}{q}$ gdje je q cio pozitivan broj. Tada je
$$\frac{1}{q}\cdot PQ = AB \quad \text{odakle je } q\cdot AB = PQ$$

U novom sistemu mjerenja je $q\cdot m_1(AB)=m_1(PQ)$
tj. $m_1(AB)=\frac{1}{q} m_1(PQ) = m(AB)\cdot m_1(PQ)$

Na potpuno isti način teorema se dokaže i u slučaju kad je $m(AB)=\frac{p}{q}$ gdje su p i q cijeli pozitivni brojevi.

Neka je sada $m(AB)=r$ gdje je r pozitivan iracionalan broj. Tada je $r\cdot PQ = AB$ i vrijede nejednakosti $n\cdot PQ < AB < (n+1) PQ$,
$$\left(n+\frac{n_1}{2}\right)PQ < AB < \left(n+\frac{n_1+1}{2}\right)\cdot PQ$$
$$\left(n+\frac{n_1}{2}+\frac{n_2}{2^2}\right)PQ < AB < \left(n+\frac{n_1}{2}+\frac{n_2+1}{2^2}\right)PQ$$

i tako dalje

$$\left(n+\frac{n_1}{2}+\frac{n_2}{2^2}+\dots+\frac{n_\nu}{2^\nu}\right)PQ < AB <$$

$$\left(n+\frac{n_1}{2}+\frac{n_2}{2^2}+\dots\frac{n_\nu+1}{2^\nu}\right)PQ$$

Odatle je

$$n\cdot m_1(PQ) < m_1(AB) < (n+1)\, m_1(PQ)$$

$$\left(n+\frac{n_1}{2}\right) m_1(PQ) < m_1(AB) < \left(n+\frac{n_1+1}{2}\right) m_1(PQ)$$

$$\left(n+\frac{n_1}{2}+\frac{n_2}{2^2}+\dots+\frac{n_\nu}{2^\nu}\right) m_1(PQ) < m_1(AB) <$$

$$< \left(n+\frac{n_1}{2}+\frac{n_2}{2^2}+\dots+\frac{n_\nu+1}{2^\nu}\right)$$

Kao što vidimo $m_1(AB)$ nalazi se između dva niza brojeva kod kojih je razlika općih članova jednaka $\frac{1}{2^\nu}\cdot m_1(PQ)$. Kako je

$$\lim_{\nu\to\infty}\frac{1}{2^\nu}\cdot m_1(PQ)=0$$

i $r=\lim\limits_{\nu\to\infty}\left(n+\frac{n_1}{2}+\frac{n_2}{2^2}+\dots+\frac{n_\nu}{2^\nu}\right)$ to

dobijamo da je $m_1(AB)=r\cdot m_1(PQ)$. Pošto je po pretpostavci $m(AB)=r$ to na kraju dobivamo,

$m_1(AB) = m(AB) \cdot m_1(PQ)$

Neka su d i d' proizvoljni elementi iz skupa D. ~~Prema posljednjoj teoremi~~ U sistemu mjerenja čija je jedinična duž PQ njima pripadaju brojeve $m(d)$ i $m(d')$ a u sistemu mjerenja čija je jedinična duž P_1Q_1 njima pripadaju brojevi $m_1(d)$ i $m_1(d')$. Prema posljednjoj teoremi vrijedi $m_1(d) = m(d) \cdot m_1(PQ)$ i $m_1(d') = m(d') \cdot m_1(PQ)$.

Odavde je $\dfrac{m_1(d)}{m_1(d')} = \dfrac{m(d)}{m(d')}$

dakle broj $\dfrac{m(d)}{m(d')}$ nezavisi od izbora sistema mjerenja nego samo od elemenata d i d'. Taj broj zove se razmjera elemenata d i d' i označava se sa

$\dfrac{d}{d'} = \dfrac{m(d)}{m(d')} = k$ gdje je k pozitivan realan broj.

Ako je duž AB jedna reprezentacija elementa d a duž $A'B'$ jedna reprezentacija elementa d' onda je:

$$\frac{m(AB)}{m(A'B')} = \frac{m(d)}{m(d')} = k$$

Broj $\frac{m(AB)}{m(A'B')}$ zove se razmjera duži AB i $A'B'$

i označava se ovako:

$$\frac{AB}{A'B'} = k$$ gdje je k pozitivan realan broj.

O mjerenju uglova

Pri mjerenju uglova postupamo na isti način kao i pri mjerenju duži.

Definicija: Neka je svakom uglu pridružen pozitivan realan broj tako da: m_1) podudarnim uglovima pridružen je isti broj,

m_2) uglu koji je jednak zbiru dva ugla pridružen je broj koji je jednak zbiru brojeva pridruženih svakom uglu posebno,

m_3) postoji ugao kome je pridružen broj 1

Broj koji je pridružen uglu $\measuredangle ab$ zove se mjerni broj ugla $\measuredangle ab$ i označava se ovako $m(\measuredangle ab)$.

Slične teoreme, misli se u odnosu na duži, vrijede i za uglove. Tako teorema koja za uglove tvrdi ono što Arhimedova aksioma tvrdi za duži glasi: Neka su $\measuredangle ab$ i $\measuredangle cd$ dva proizvoljna ugla i α ona poluravan čija je ivica prava aa^* a u kojoj leži poupravu b. Neka su $a_1, a_2, a_3, \ldots$ polupr[ave] sa zajedničkom početnom tačkom u tjemenu ugla $\measuredangle ab$ sadržane u poluravni α i takve da polu~~ravan~~ prava a_1 sadržana u $\measuredangle a a_2$, a_2 sadržana u uglu $\measuredangle a_1 a_3$ i ugao

$\measuredangle a a_1 \cong \measuredangle a_1 a_2 \cong \ldots \measuredangle cd$ tada postoji cio pozitivan broj n takav da je

$a_n \cong b$ ili je pp b u uglu $\measuredangle a_n a_{n+1}$.

<u>Teorema</u>

Ako je zadan jedinični ugao mjerni broj svakog ugla jednoznačno je određen.

<u>Teorema</u>

Svakom uglu može se pridružiti pozitivan realan broj tako da ti brojevi zadovoljavaju sve uslove definicije mjerenja.

<u>Teorema</u> koja za uglove tvrdi ono što Kantorova aksioma tvrdi za duži glasi ovako: Neka je dat beskonačan niz uglova sa zajedničkim tjemenom tako da je svaki ugao sadržan u unutrašnjosti prethodnog ugla i nepostoji ugao koji je sadržan u unutrašnjosti svih uglova niza. Tada postoji poluprava čija je početna tačka zajedničko tjeme tih uglova a koja je sadržana u unutrašnjosti svih uglova niza.

Teorema

Ako je zadan jedinični ugao za svaki pozitivan realan broj r koji nije veći od onog što odgovara ravnom uglu postoji ugao $\measuredangle ab$ tako da je $m(\measuredangle ab) = r$

Primjedba

U posljednjoj teoremi pojavljuje se ograničenje: koji nije veći od onog što odgovara ravnom uglu. Odgovarajuća teorema za duži je glasila: Ako je zadana jedinična duž za svaki pozitivan realan broj r postoji duž AB tako da je $m(AB)=r$. Ovdje nema nikakvog ograničenja. Vidimo da mjerenje uglova ima u odnosu na mjerenje duži neki specifičnosti.

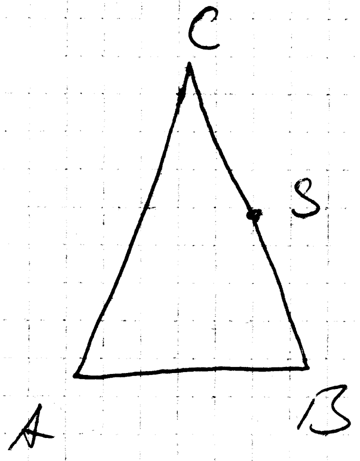
b) Vidjeli smo da postoje razni sistemi mjerenja duži. Šta više postoji bezbroj takvih sistema koji se jedan od drugog razlikuju samo u izboru jedinične duži. Za sada mi nismo u mogućnosti da geometrijskim sredstvima iz skupa D izdvojimo jedan sistem pa nismo u mogućnosti da geometrijskim sredstvima definišemo jediničnu duž i da iz bezbroj sistema mjerenja duži izdvojimo jedan. I pri mjerenju uglova postoje razni sistemi ali iz skupa U možemo za jedinični ugao možemo uzeti pravi ugao ili jedan njegov dio. Naime pravi

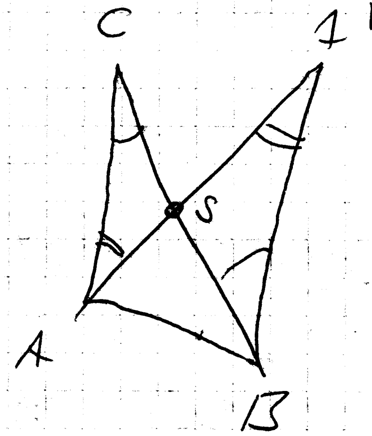
ugao je definisan geometrijskim svojstvima.
Naime pri mjerenju je potrebno jednom geometrijskom objektu pridružiti jedan određen broj koji nemora biti broj 1. Pravom uglu pridružuje se broj 90 kao mjerni broj. Tada uglu koji se dobije kad se pravi ugao podjeli na 90 jednakih dijelova pripada broj 1. 90-ti dio pravog ugla zove se stepen ili stupanj pa pravi ugao ima: devedeset stepeni što označavamo ovako: 90°. Pravom uglu može se pridružiti i neki drugi broj npr. broj 100. Jedinica se tada zove gradus.
Za mjerenje uglova najčešće se upotrebljava sistem u kojem je pravom uglu pridružen broj $\pi/2$.
Mi ćemo dalje isključivo koristiti taj sistem.
Dakle vrijedi $0 \leq m(\measuredangle ab) \leq \pi$

$$m(\measuredangle ab) + m((\measuredangle a^* b) = \pi$$

Mjerenje uglova može se proširiti i na mjerenje diedara. Naime ako je zadan jedinični ugao diedru pridružujemo onaj broj koji je pridružen njegovom uglu normalnog presjeka.

Neke posljedice aksioma neprekidnosti





Teorema 1

Svaka duž sadrži n-1 tačku koje je djele na n podudarnih duži.

Dokaz: Uočimo duž AB i neka je PQ jedinična duž. Tada je broj m(AB) jednoznačno određen. Ako je n cio pozitivan broj, jednoznačno je određen i broj $\frac{m(AB)}{n}$. Prema teoremi: Ako je jedinična duž zadana za svaki pozitivan realan broj r, postoji duž čiji je to mjerni broj, slijedi da postoji tačka A_1 tako da je: $A{\cdot}A_1{\cdot}B$ i $m(AA_1) = \frac{m(AB)}{n}$. Po istoj teoremi postoji tačka A_2 tako da je $A_1{\cdot}A_2{\cdot}B$ i tako da je $m(A_1A_2) = \frac{m(AB)}{n}$, i tako dalje postupak nastavljamo. Za cio pozitivan ν (ni) i $\nu \leq n-1$ je $m(AA_\nu) < m(AB)$ tj. $A{\cdot}A_\nu{\cdot}B$

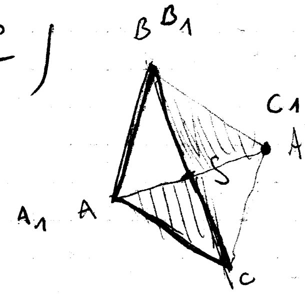
Kako je $m(AA_1| = m(A_1A_2| = \dots = m(A_{n-1}B|$ to je $AA_1 \cong A_1A_2 \cong \dots \cong A_{n-1}B$

Teorema 2

Za svaki trougao ΔABC je $m(\measuredangle A) + m(\measuredangle B) + m(\measuredangle C) \leq \pi$. Dokaz: Pretpostavimo da tvrdnja teoreme nije tačna tj. pretpostavimo da vrijedi $m(\measuredangle A) + m(\measuredangle B) + m(\measuredangle C) > \pi$ (*)

Tada postoji pozitivan realan broj r tako da vrijedi: $m(\measuredangle A) + m(\measuredangle B) + m(\measuredangle C) = \pi + r$. Neka je S središte strane BC i

$A' = \vec{\sigma}_S(A)$ Tada je $\Delta A'SB = \vec{\sigma}_S(\Delta ASC)$



pa vrijedi:

$\measuredangle AA'B \cong \measuredangle A'AC$ i

$\measuredangle A'BC \cong \measuredangle ACB$. Otuda je mjerni broj ugla $m(\measuredangle AA'B) + m(\measuredangle ABC) + m(\measuredangle A'BC) + m(\measuredangle BAA')$

$= m(\measuredangle A) + m(\measuredangle B) + m(\measuredangle C)$

ako sada A označimo sa A_1, B sa B_1 i A' sa C_1 dobijamo trougao $\Delta A_1B_1C_1$ po kome je $m(\measuredangle A_1) + m(\measuredangle B_1) + m(\measuredangle C_1) = \pi + r$

Dalje znamo da za dva ugla $\measuredangle A_1$ i $\measuredangle C_1$ moguć je najviše jedan od slijedeća tri odnosa:

$$\measuredangle A_1 \cong \measuredangle C_1, \quad \measuredangle A_1 > \measuredangle C_1, \quad \measuredangle A_1 < \measuredangle C_1$$

oznake u trouglu A_1, B_1, C_1 uvijek možemo izabrati tako da bude $\measuredangle A_1 < \measuredangle C_1$. Sada je $\measuredangle A = \measuredangle A_1 + \measuredangle C_1 > \measuredangle A_1 + \measuredangle A_1$ tj.

$$2\measuredangle A_1 < \measuredangle A \quad \text{odnosno} \quad \measuredangle A_1 < \frac{1}{2}\measuredangle A$$

Ako sada sa S_1 označimo središte duži B_1C_1 i ponovimo postupak dobijamo trougao $\triangle A_2B_2C_2$ za čije uglove vrijedi: mjerni broj ugla $m(\measuredangle A_2) + m(\measuredangle B_2) + m(\measuredangle C_2) = \pi + r$ i $\measuredangle A_2 < \frac{1}{2^2}\measuredangle A$

itd. nastavljajuci postupak dolazimo do trougla $\triangle A_nB_nC_n$ za čije uglove vrijedi:

$m(\measuredangle A_n) + m(\measuredangle B_n) + m(\measuredangle C_n) = \pi + r$ i

$$\measuredangle A_n < \frac{1}{2^n}\measuredangle A$$

r je pozitivan relalan broj koji nije veći od onog što odgovara ravnom uglu pa postoji ugao čiji je to mjerni broj. Neka je to ugao $\measuredangle pq$ i $m(\measuredangle pq) = r$.

Setimo se sada teoreme: za svaku duž AB

postoji cio pozitivan broj n takav da se poslije n uzastopnih raspolavljanja jedinične duži dobije duž koja je manja od duži AB. Na osnovu odgovarajuće teoreme za uglove slijedi da postoji cio pozitivan broj n takav da vrijedi $\frac{1}{2^n} \measuredangle A < \measuredangle pq$. Sada je

$$m(\measuredangle A_n) \leq \frac{1}{2^n} m(\measuredangle A) < m(\measuredangle pq) = \gamma$$

Odavde iz jednakosti

$$m(\measuredangle A_n) + m(\measuredangle B_n) + m(\measuredangle C_n) = \pi + \gamma$$

slijedi:
$$m(\measuredangle B_n) + m(\measuredangle C_n) = \pi + \gamma - m(\measuredangle A_n)$$
$$> \pi + \gamma - \gamma = \pi$$

tj. $m(\measuredangle B_n) + m(\measuredangle C_n) > \pi \quad (**)$

Naprijed smo dokazali dvije <u>teoreme</u>: <u>prvaT</u> zbir $u_1 + u_2$ postoji ako i samo ako je $u_2^* \leq u_1$ <u>druga: T</u> vanjski ugao trougla veći je od unutrašnjeg ugla trougla koji mu nije naporedan. Iz ove dvije teoreme slijedi da zbir dva ugla trougla uvijek postoji. Dakle vrijedi $\measuredangle B_n + \measuredangle C_n = \measuredangle ab$

također vrijedi $0 \leq m(\measuredangle ab) \leq \pi$

Iz prethodnog slijedi $m(\sphericalangle B_1) + m(\sphericalangle C_1)$

$= m(\sphericalangle ab)$ tj.

$$m(\sphericalangle B_1) + m(\sphericalangle C_1) \leq \pi \quad (***)$$

Dvije zvijezde i tri zvijezde su u kontradikciji. Prema tome naša naknadno postavljena pretpostavka ne vrijedi pa je vjerni broj $m(\sphericalangle A) + m(\sphericalangle B) + m(\sphericalangle C) \leq \pi$ gdje su $\sphericalangle A$, $\sphericalangle B$ i $\sphericalangle C$ uglovi trougla.

Sljedeći tekst SAMO PROČITATI

do naredne TEOREME

Prije nego iskažemo i dokažemo dvije važne teoreme - teoremu o zajedničkim tačkama prave i kružnice i teoremu o zajedničkim tačkama dvije kružnice - treba primijetiti sljedeće.

Svaki nastavnik matematike treba da zna aksiomatsko izvođenje. Aksiomatski predavati geometriju veoma je ozbiljan matematički zadatak, ali nepoznavajući aksiome i izvođenje drugih stavova iz aksioma može se dogoditi da su stavovi, pogotovo dokazi tih stavova pogrešni, na taj način što se pri dokazu stava A koristi neposredno ili posredno stav B a pri dokazu stava B koristi se stav A. Ovakva greška u matematici zove se <u>Circulus vitiosus</u> i može se uvesti i u udžbenicima matematike. Tada je u stvari čitav udžbenik pogrešan. Da nastavnik ne bi činio tu grešku potrebno je da zna deduktivan način izvođenja geometrije iz aksioma. Nastavnik treba da zna koje je teoreme naveo kao očite ne dokazujući ih. Smatramo da je i ovo bolje nego da se dolazi do Circulus vitiosus-a. Ovdje ćemo prezentirati dokaze teorema koji su u srednjoj školi ili pogrešni ili izostavljeni;

1. Ako hoćemo da elementarnu geometriju povežemo sa realnim brojevima tj. da u elementarnoj geometriji primjenimo analizu mi moramo uvesti aksiome neprekidnosti i tako dobijamo analitičku geometriju. U analitičkoj geometriji dokazi ovih teorema su jednostavni.

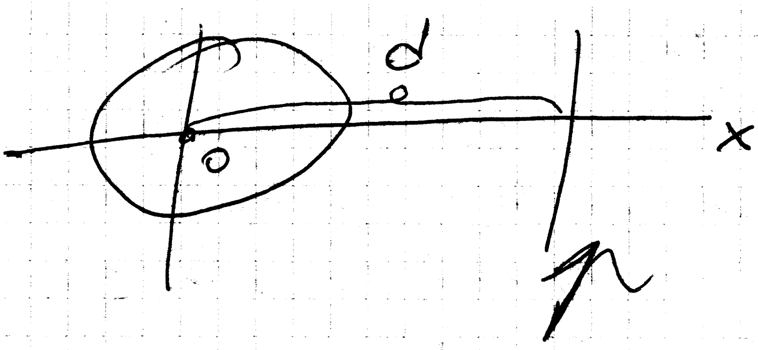
I Ako je p prava a $k(O,r)$ kružnica sa centrom u O i radijusom r i d rastojanje centra O od prave p onda

1.) $d < r$ prava i kružnica imaju dvije zajedničke tačke

2) $d = r$ prava i kružnica imaju jednu zajedničku tačku;

3) $d>r$ prava i kružnica nemaju ni jednu zajedničku tačku.

Zaista, da bi jednačina kružnice i jedn. prave bile što jednostavnije izaberimo koordinatni sistem tako da mu početak bude u centru O kružnice a x osa bude normalna na pravu p.



Sada jednačine kružnice i prave glase

$$x^2+y^2=r^2$$

$$x=d$$ gdje je d razmak centra od prave.

Rješavajući posljednji sistem dobijamo

$$y=\pm\sqrt{r^2-d^2}$$

Odmah se vidi da za $d<r$ prava i kružnica imaju dvije zajedničke tačke (d, y_1) i $(d, -y_1)$.

Za $d=r$ imaju jednu zajedničku tačku $(d,0)$ a za $d>r$ nemaju zajedničkih tačaka.

Slično ako je: I $k_1(O_1,r_1)$ kružnica sa centrom u O_1 i radijusom r_1, kružnica $k_2(O_2,r_2)$

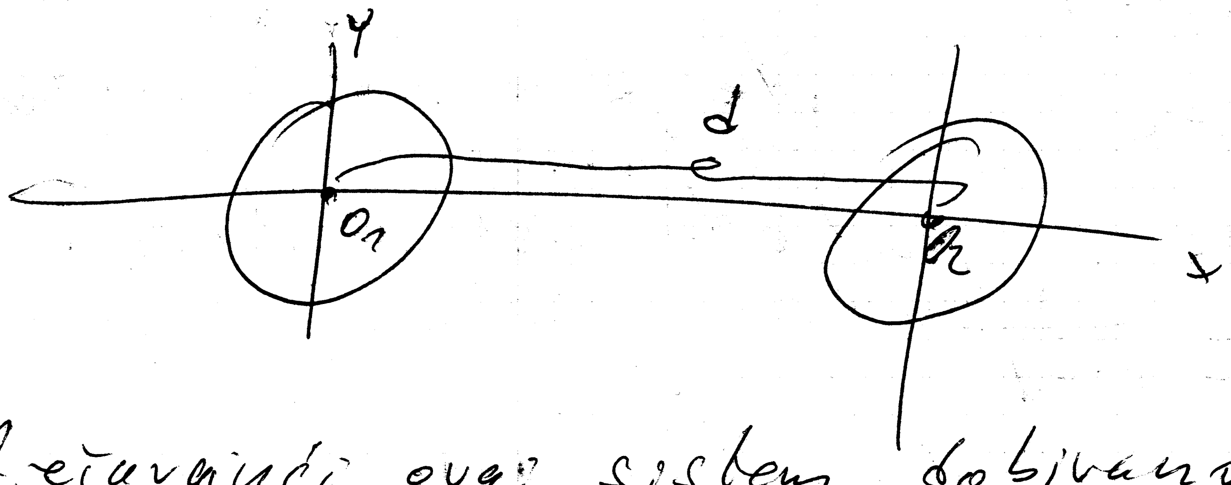
sa cen. O_2 i rad. r_2 i d rastojanje centara onda za:

1' $d = r_1 + r_2$ (ili $d = |r_1 - r_2|$) kružnice imaju jednu zajedničku tačku

2' za $|r_1 - r_2| < d < r_1 + r_2$ kružnice imaju dvije zajedničke tačke.

Zaista:

Da bi jednačine ovih kružnica bile što jednostavnije izaberimo koordinatni početak tako da bude u centru jedne kružnice a da x osa prolazi kroz centar druge kružnice. Tada jednačine kružnica glase: $x^2 + y^2 = r_1^2$ i $(x-d)^2 + y^2 = r_2^2$ gdje je d-rastojanje centara



Rješavajući ovaj sistem dobivamo

$$x = \frac{r_1^2 - r_2^2 + d}{2d}$$

$$y^2 = \frac{(r_2 + r_1 - d)(r_2 - r_1 + d)(r_1 - r_2 + d)(r_1 + r_2 + d)}{4d^2}$$

Odmah primijetimo da je $r_1+r_2+d>0$.

1' Ako je $r_1+r_2-d=0$ tj. $d=r_1+r_2$

ili $r_2-r_1+d=0$ tj. $d=r_1-r_2$ ili

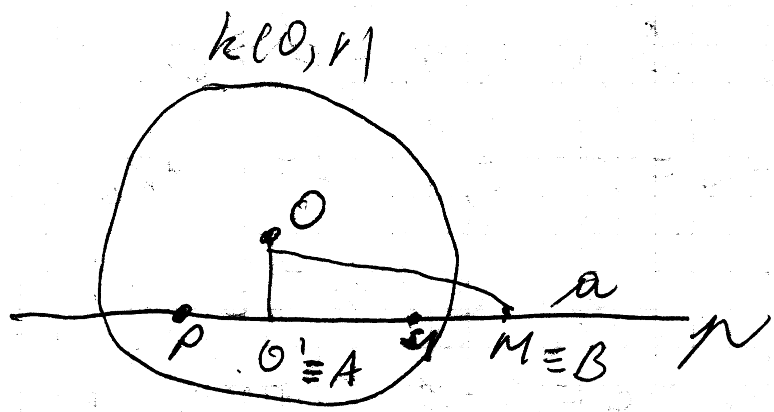
$r_1-r_2+d=0$ tj. $d=r_1-r_2$ odnosno

$d=|r_1-r_2|$ i posljednji razlomak je jednak nuli i kružnice imaju ~~samo~~ tačno jednu zajedničku tačku

2' Ako su tri preostala faktora u brojniku posljednjeg razlomka pozitivni ili dva negativna a jedan pozitivan razlomak će biti pozitivan i kružnice imaju tačno dvije zajedničke tačke.

3' Ako su dva faktora posmatranog razlomka pozitivni a jedan negativan razlomak je negativan i rešenja su imaginarna.

Ali pri svemu ovome treba da se podsjetimo na čemu se zasniva analitička geometrija. Ona se zasniva na teoremi: Svakoj tački na pravoj odgovara realan broj i obratno svakom realnom broju odgovara jedna tačka na pravoj. Prvi dio teoreme zasniva se na Arhimedovoj aksiomi a drugi na Kantorovoj. Sada ćemo dokazati sljedeću važnu teoremu: Ako prava sadrži unutrašnju tačku kružnice ona sadrži dvije tačke te kružnice.



$OO' < OP < r$

$OO' < r$

$O'M \cong r$

$OM > O'M \cong r$

$OM > r$

$P \in p$ $\quad OP < r$

$\underline{OS_1 \cong r}$

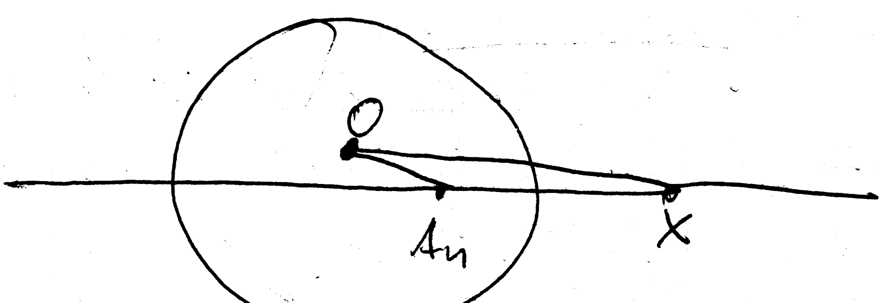
$OS_1 > r$ $\quad A \equiv A_1$ $\quad S_1 \equiv B$

$OS_1 < r$ $\quad S_1 \equiv A_1$ $\quad B \equiv B_1$

A_1B_1 $\quad S_2$ $\quad OS_2 \cong r$

$OS_2 > r$ $\quad A_1 = A_2$ $\quad S_2 \equiv B_2$

$OS_2 < r$ $\quad S_2 = A_2$ $\quad B_1 \equiv B_2$



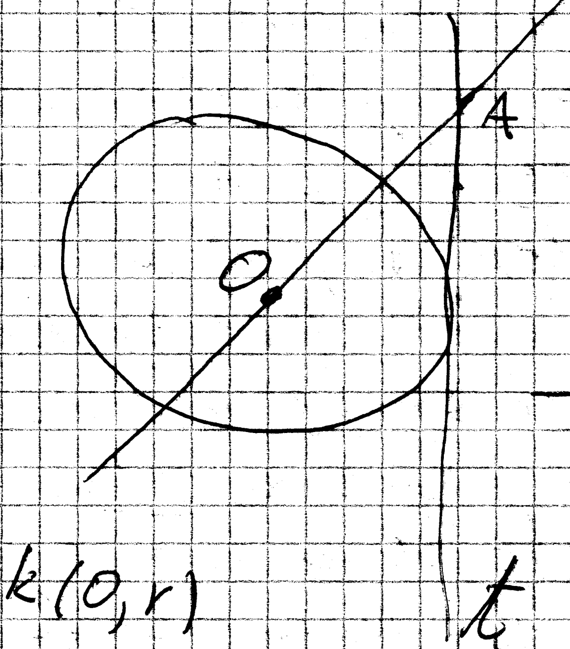
Dokaz

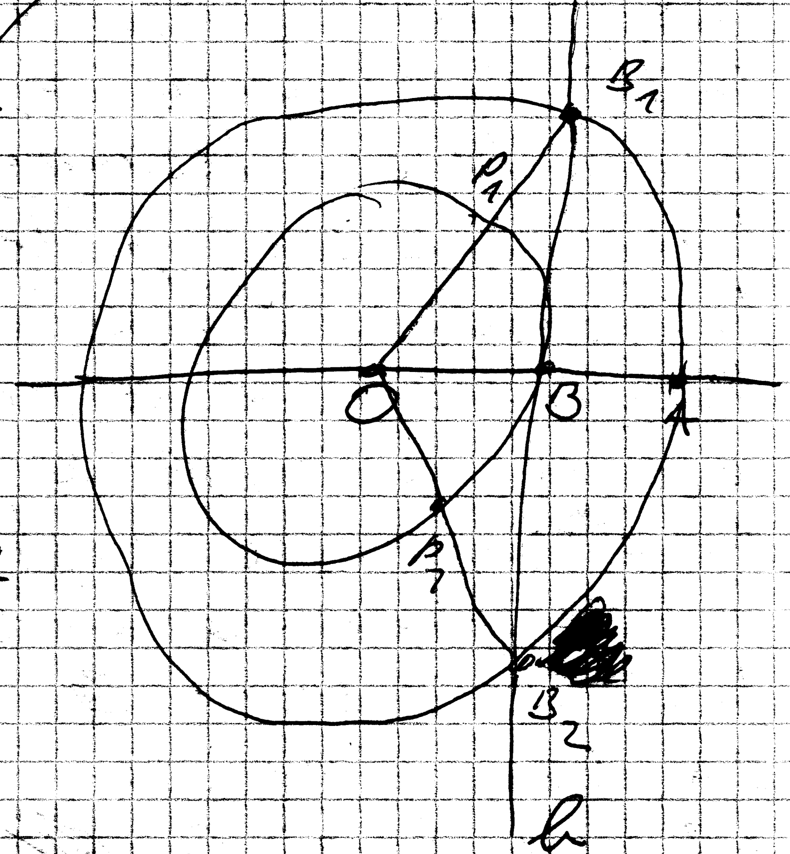
Neka je $k(O,r)$ kružnica i p prava a tačka $P \in p$ tako da je $OP < r$. Tada je P unutrašnja tačka. Neka je O' ortogonalna projekcija tačke O na pravu p. Tada je $OO' < OP < r$, $OO' < r$

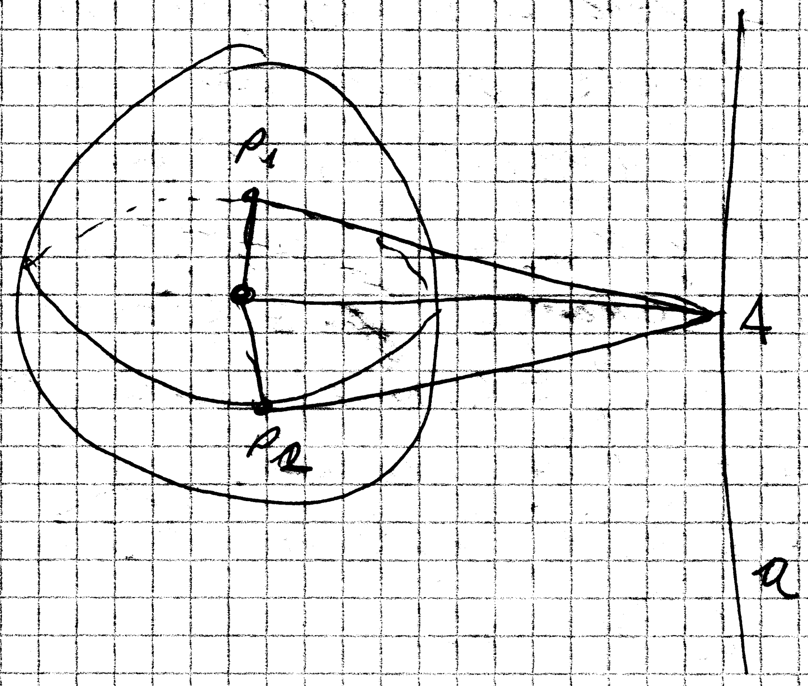
pa je i O' unutrašnja tačka kružnice. Tačka O' dijeli ~~tačku~~ pravu p na dvije poluprave. Na jednoj od tih polupravih uzmimo tačku M tako da je $OM = r$. U pravouglom trouglu $\Delta OO'M$ $OM > O'M \cong r$ tj. $OM > r$ pa je M vanjska tačka kružnice. Označimo O' sa A a M sa B i neka je S_1 središte duži AB. Ako je $OS_1 \cong r$ dokaz je završen. Tačka S_1 je jedna zajednička tačka prave i kružnice. Druga je simetrična sa S_1 u odnosu na pravu OO'. Ako nije $OS_1 \cong r$ onda je $OS_1 > r$ ili je $OS_1 < r$. U prvom slučaju stavljamo $A \equiv A_1$, $S_1 \equiv B_1$ a u drugom slučaju $S_1 \equiv A_1$ $B \equiv B_1$. Neka je S_2 središte duži A_1B_1. Ako je $OS_2 \cong r$ dokaz je završen a ako nije onda je $OS_2 > r$ ili je $OS_2 < r$. U prvom slučaju stavljamo $A_1 \cong A_2$ i $S_2 \cong B_2$ a u drugom $S_2 \cong A_2$ $B_1 \cong B_2$ i postupak nastavljamo. Mogu se dogoditi dva slučaja. Ili postoji cio pozitivan broj n tako da nakon n raspolavljanja dobijemo tačku

S_n tako da vrijedi $OS_n \cong r$. Ako takav broj n ne postoji onda imamo beskonačan niz duži A_1B_1, A_2B_2 itd. od kojih je svaka sadržana u prethodnoj i podudarna polovini prethodne duži. Kako za svaku duž $A_\nu B_\nu$ ovog niza postoji n dovoljno velik tako da se poslije n raspolavljanja duži AB dobije duž koja je manja od duži $A_\nu B_\nu$ ne postoji duž koja je sadržana u svim dužima našeg niza. Prema Kantorovoj aksiomi postoji tačka X koja je sadržana u svim dužima niza: dakle $X \in A_nB_n \ \forall n$
Mi ćemo dokazati da mora biti $OX \cong r$. Naime ako nije $OX \cong r$ onda je $OX > r$ ili je $OX < r$. Pošto je dokaz u oba slučaja sličan pretpostavimo da je $OX > r$. Tada je $OX = r + LN$. Pošto je $X \in A_nB_n \ \forall n$ to je duž $A_nX < A_nB_n$. Dalje uvijek možemo naći cio pozitivan broj n dovoljno velik da bude $A_nB_n < LN$ pa je i $A_nX < LN$. Također primjetimo da ne može za svako $\forall n$ počev od nekog utvrđenog $A_n = X$ jer bi tada bilo: $OA_n = OX > r$ a kod nas su A_n uvijek unutrašnje tačke kružnice. Sada iz trougla OA_nX dobijamo $OA_n > OX - A_nX > r + LN - LN = r$
Ovo je kontradikcija sa činjenicom da su

An unutrašnje tačke kružnice. Mora dakle biti $Ox \cong r$. Druga zajednička tačka prave i kružnice simetrična je sa x u odnosu na pravu OO'. Iz glave 3 slijedi da prava i kružnica nemaju više zajedničkih tačaka.
Kao neposredne posljedice imamo:
1. posljedica ako prava sadrži unutrašnju tačku sfere $S(O,r)$ onda ona sadrži dvije tačke te sfere.
Dokaz: Neka prava a sadrži unutrašnju tačku A sfere $S(O,r)$. Prava a i centar O sfere određuju neku ravan α pa je $S(O,r) \cap \alpha = k(O,r)$. Sada prava a sadrži unutrašnju tačku A kružnice $k(O,r)$. Prema prethodnoj teoremi ona sadrži dvije tačke te kružnice. Kako $k(O,r) \subset S(O,r)$ to su te tačke zajedničke tačke prave i sfere.
Posljedica 2. posljedica posljedice Ako ravan α sadrži unutrašnju tačku sfere $S(O,r)$ onda je $S(O,r) \cap \alpha =$ kružnica.
Dokaz: Neka ravan α sadrži neku tačku A sfere $S(O,r)$. Uzmimo u ravni α proizvoljnu pravu ~~a~~ koja sadrži tačku A. Sada prava sadrži unutrašnju tačku sfere pa prema posljedici 1 ona sadrži dvije tačke sfere. Sada na osnovu verzulteta glave 3 vrijedi $S(O,r) \cap \alpha =$ kružnica.







U glavi 3 mi smo dokazali sljedeću teoremu: Ako je t tangenta kružnice k(O, r) i A tačka te tangente različita od tačke dodira onda postoji još jedna i samo jedna tangenta kružnice koja sadrži tačku A. Tada nismo mogli odgovoriti na sljedeće pitanje: ako je A vanjska tačke kružnice $k(O,r)$ postoje li tangente kružnice koje sadrže tačku A. Mi smo sada u mogućnosti da odgovorimo na to pitanje tj. da dokažemo sljedeću teoremu: Ako je A vanjska tačka kružnice $k(O,r)$ postoje dvije i samo dvije tangente kružnice koje sadrže tačku A.

Dokaz: Neka je A vanjska tačka kružnice $k(O,r)$. Kružnica k i prava OA imaju dvije zajedničke tačke. Onu koja je između O i A označimo sa B. Neka je b prava koja sadrži tačku B, normalna je na pravu OA. Uočimo kružnicu $k_1(O, OA)$. Pošto je $OB < OA$ to je B ~~van~~ unutrašnja tačka kružnice k_1. Dakle prava b sadrži unutrašnju tačku kružnice k_1 a ta prava i kružnica k_1 imaju dvije zajedničke tačke B_1 i B_2. Neka je $P_1 \in k(O,r)$ tako da je $O \cdot P_1 \cdot B_1$ i $P_2 \in k(O,r)$ tako da je $O \cdot P_2 \cdot B_2$. Uočimo rotaciju sa centrom u O i orjentisanim uglom $\widehat{AOB_1}$ i

$$\rho = \rho_{O, \widehat{AOB_1}}$$

U ovoj rotaciji je $\rho(O) = O$ $\rho(A) = B_1$

$\rho(B) = P_1$ $\rho(B_2) = A$ tj. $\rho(OA) = OB_1$ a

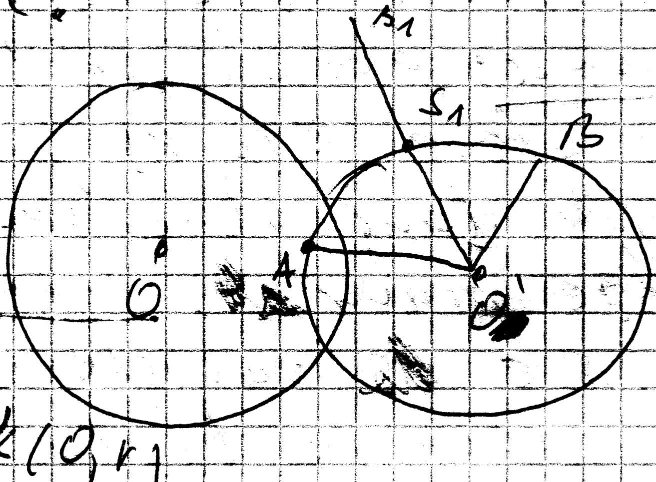
$\rho(B_2B) = AP_1$. Kako je $OA \perp B_2B$ to je i $OB_1 \perp AP_1$. Otuda slijedi da je prava AP_1 tangenta kružnice $k(O,r)$. Na sličan način dokaže se da je prava AP_2 tangenta

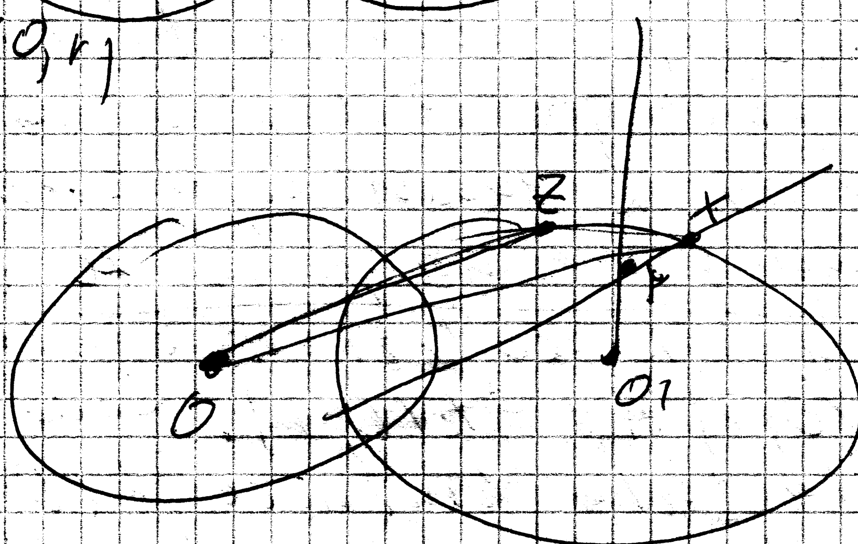
te iste kružnice. Da kružnica $k(O,r)$ ne može imati više od dvije tangente koje sadrže vanjsku tačku A slijedi iz rezultata glave 3.
Kao neposrednu posljedicu imamo: ako je A vanjska tačka sfere $S(O,r)$ postoji beskonačno tangenata sfere koje sadrže tačku A.
Dokazaćemo teoremu: ako su sve tačke prave a vanjske tačke sfere $S(O,r)$ postoji dvije i samo dvije tangentne ravni te sfere koje sadrže pravu a. Dokaz: Neka su sve tačke prave a vanjske tačke sfere $S(O,r)$ i neka je tačka A ortogonalna projekcija centra O na pravu a. Označimo sa α ravan koja sadrži tačku A i normalna je na pravu a ($a \perp \alpha$).
Tada ravan α sadrži i centar sfere pa je $S(O,r) \cap \alpha = k(O,r)$. Sada je tačka A vanjska tačka kružnice $k(O,r)$ pa prema dokazanoj teoremi postoje dvije tangente AP_1 i AP_2 kružnice k koje sadrže tačku A. Pri tome je $AP_1 \perp OP_1$ i $AP_2 \perp OP_2$.
Označimo sa β_1 ravan koja sadrži pravu a i tačku P_1 a sa β_2 ravan koja sadrži pravu a i tačku P_2. Sada je prava a sadržana u β_1, prava a je normalna na α, prava OP_1 a također OP_2 sadržane su u α. Kako je još $AP_1 \perp OP_1$ i $AP_2 \perp OP_2$ dobivamo da je $AP_1 = \alpha \cap \beta_1$ i analogno $AP_2 = \alpha \cap \beta_2$ i $\alpha \perp \beta_1$ i $\alpha \perp \beta_2$

Dakle tražene tangente ravni su B_1 i B_2.

Dokazaćemo sljedeću teoremu:

Ako o kružnica $k'(O', r')$ sadrži neke unutrašnje i neke vanjske tačke kružnice $k(O, r)$ onda ona sadrži i dvije tačke te kružnice.





Dokaz: Neka je $A \in k'$ tako da je $OA < r$ i $B \in k'$ tako da je $OB > r$. Tada je A unutrašnja tačka kružnice k a B vanjska tačka te kruž. Mi ćemo dokazati da ove dvije kružnice imaju zajedničku tačku X koja je sadržana u uglu $AO'B$. Označimo sa s_1 simetralu ugla $AO'B$ i sa S_1 onu tačku te simetrale za koju je $O'S_1 \cong r'$. Ako je pritome i $OS_1 \cong r$ dokaz je završen. S_1 je tražena tačka. Ako to nije onda je $OS_1 > r$

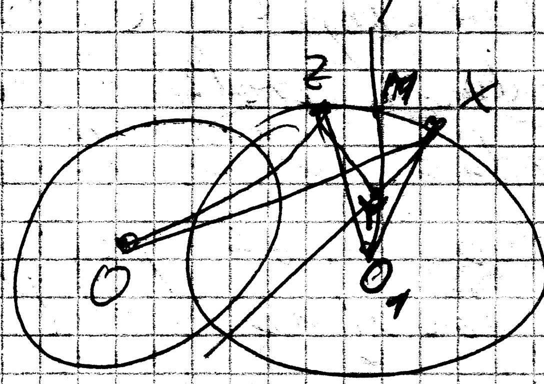
ili je $OS_1 < r$. U prvom slučaju stavljamo $A \equiv A_1$
i $S_1 \equiv B_1$ a u drugom $S_1 \equiv A_1$ i $B \equiv B_1$.
Neka je s_2 simetrala ugla $\angle A_1O'B_1$ i neka
je S_2 ona tačka te simetrale za koju je
$O'S_2 \cong r'$. Ako je pritome i $OS_2 \cong r$ dokaz
je završen. S_2 je tražena tačka. Ako to nije
onda je $OS_2 > r$ ili je $OS_2 < r$. U prvom
slučaju stavljamo $A_1 \equiv A_2$ i $S_2 \equiv B_2$ a u
drugom slučaju stavljamo $S_2 \equiv A_2$, $B_1 \equiv B_2$ i
sa s_3 označavamo simetralu ugla $\angle A_2O'B_2$.
Postupak nastavljamo. Mogu se dogoditi
dvije mogućnosti: ili postoji cio pozitivan
broj n takav da poslije n raspolavljanja
dobijemo tačku S_n takvu da je $OS_n \cong r$
ili takav broj n ne postoji. U ovom
drugom slučaju dobivamo beskonačan niz
uglova $\angle A_nO'B_n$ kod kojih je svaki ugao
sadržan u prethodnom uglu i podudaran
je polovini prethodnog ugla. Kako za svaki
ugao $\angle A_\nu O'B_\nu$ ovog niza postoji cio
pozitivan broj n dovoljno velik tako da
se poslije n uzastopnih raspolavljanja
ugao $\angle AO'B$ dobije ugao koji je manji
od ugla $\angle A_\nu O'B_\nu$ ne postoji ugao koji je
sadržan u svim uglovima niza. Prema teoremi
koja zahtijeva za uglove ono što Kanto-
rova aksioma zahtijeva za duži slijedi da
postoji poluprava x čija je početna tačka
O' zajedničko tjeme tih uglova i koja je

sadržana u svim uglovima mi ta. Neka je X ona tačka te polupreve za koju je $O'X \cong r'$. Mi ćemo dokazati da mora biti i $OX \cong r$. Pritome napomenimo da je A_n unutrašnja a B_n vanjska tačka kružnice k. Pretpostavimo da nije $OX \cong r$. Tada je $OX > r$ ili je $OX < r$. Pošto je dokaz u oba slučaja sličan pretpostavimo da je $OX > r$. Tada je $OX = r + LN$. Uzmimo proizvoljnu pravu koja sadrži tačku X ali ne sadrži tačke O i O'. Na toj pravoj uzmimo tačku Y tako da je $XY \cong \frac{LN}{2}$. Neka je $Z = S_{O'Y}(X)$ i

$\{M\} = \underline{ZX} \cap \underline{O'Y}$. U trouglu $\triangle MXY$ je

$MX < XY \cong LN/2$ tj.

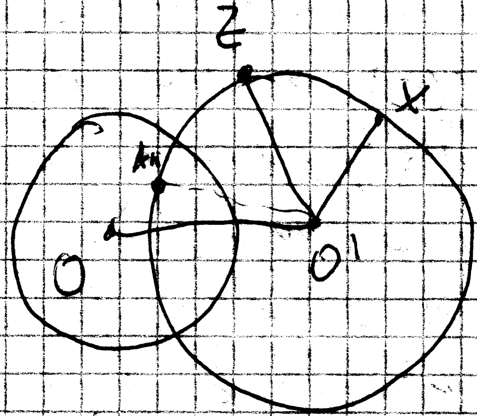
$$2MX < LN \quad \text{tj.} \quad ZX < LN$$

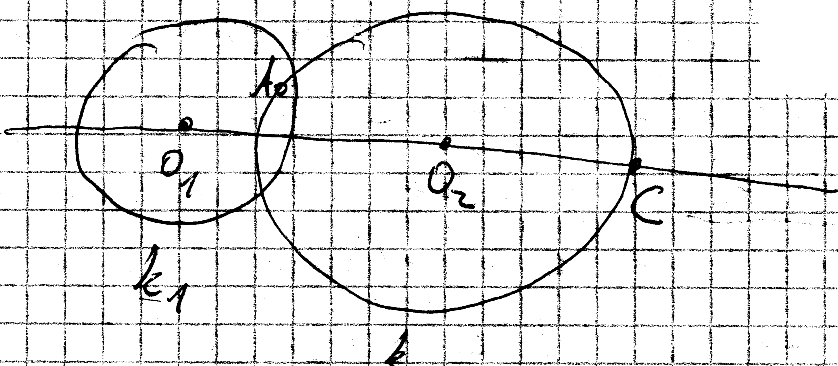


Uočimo sad trougao $\triangle OXZ$ u kom trouglu je $OZ > OX - ZX > r + LN - LN = r$ tj.

$$OZ > r \quad (1)$$

Primjetimo i sljedeće polupreva $\overline{O'X}$ je sadržana u svim uglovima $\measuredangle A_nO'B_n$ pa je ugao $\sphericalangle A_nO'X < \sphericalangle A_nO'B_n$





Primjetimo da se nemože dogoditi da počev od nekog utvrđenog n sve tačke A_n se poklapaju, tada bi bilo $A_n \equiv X$ što nemože biti zbog $OA_n \cong OX > r$ a kod nas je A_n unutrašnja tačka kružnice k_1. Na osnovu teorema koje su analogni Kantorovim aksiomama za duži slijedi da postoji cio pozitivan broj n takav da je $\sphericalangle A_nO'B_n < \sphericalangle XO'Z$. Kako je $\sphericalangle A_nO'X < \sphericalangle A_nO'B_n$ to je sada ugao $\sphericalangle A_nO'X < \sphericalangle XO'Z$. Otuda slijedi da je $\sphericalangle XO'O - \sphericalangle XO'Z < \sphericalangle XO'O - \sphericalangle A_nO'X$ tj. $\sphericalangle ZO'O < \sphericalangle A_nO'O$. U trouglovima $\triangle OO'A_n$ i $\triangle OO'Z$ je $O'A_n \cong O'Z \equiv r'$. Stranica OO' je zaje-

drička a zaugloue između podudarnih stranica vrijedi $\sphericalangle ZO'O < \sphericalangle A_nO'O$. Naspram većeg ugla leži veća strana pa dobijemo $OZ < OA_n$. Kako $OA_n < r$ to je $OZ < r$ (2). Dakle (1) i (2) su u kontradikciji. Naša pretpostavka da je $OX > r$ došla je do kontradikcije. Na sličan način se dokaže da je $OX < r$. Vrijedi, dakle, $OX \cong r$.
Druga zajednička tačka kružnica k i k' simetrična je sa X u odnosu na pravu OO'. Da ove dvije kružnice nemaju drugih zajedničkih tačaka slijedi iz rezultata glave 3.
Analogna teorema za sfere glasi: Ako sfera $S_2(O_2, r_2)$ sadrži neke unutrašnje i neke vanjske tačke sfere $S_1(O_1, r_1)$ onda vrijedi:
$S_1(O_1, r_1) \cap S_2(O_2, r_2) =$ kružnica
Dokaz: Neka je $A \in S_2$ tako da je $O_1A < r_1$ i $B \in S_2$: $O_1B > r_1$. Dakle A je unutrašnja a B vanjska tačka sfere S_1. Uzmimo ravan α određenu tačkama O_1, O_2 i A. Tada je
$S_1(O_1, r_1) \cap \alpha = k_1(O_1, r_1)$
$S_2(O_2, r_2) \cap \alpha = k_2(O_2, r_2)$ i $A \in k_2$
Prava O_1O_2 i kružnica k_2 imaju dvije zajedničke tačke. Onu koja nije između O_1 i O_2 označimo sa C. Tada je $O_1C = O_1O_2 + O_2C$.
S druge strane u ΔO_1O_2B je:

$$O_1B < O_1O_2 + O_2B$$

Kako je $O_2C \cong O_2B$ to je $O_1B < O_1O_2 + O_2C = O_1C$

Dalje, pošto je $O_1B > r_1$ to je $O_1C > r_1$. Sada je $A \in k_2$ i vrijedi $O_1A < r_1$ a $C \in k_2$ i vrijedi $O_1C > r_1$. Na osnovu prethodne teoreme slijedi da se kružnice k_1 i k_2 sijeku u dvjema tačkama. Ovim je egzistencija presjeka * dokazana. Da bismo dobili ostale tačke tog presjeka dovoljno je primijetiti da je figura $S_1(O_1, r_1) \cup S_2(O_2, r_2)$ simetrična u odnosu na svaku ravan koja sadrži prava O_1O_2.
Da ove dvije sfere nemaju drugih zajedničkih tačaka slijedi iz rezultata glave 3.